УДК 372.851

ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ

Каюмова А.А., учитель математики,
МБОУ «Школа №161», г. Казань
kayumova.alisa2011@yandex.ru

Тимербаева Н.В., кандидат педагогических наук, доцент,
Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань
timnell@yandex.ru

Аннотация. В данной статье рассматриваются особенности преподавания обратных тригонометрических функций в курсе математики средней школы, а также приводятся методические рекомендации для успешного изучения этой темы.

Ключевые слова: обратные тригонометрические функции, числовая окружность, обратная функция.

INVERSE TRIGONOMETRIC FUNCTIONS IN THE SCHOOL COURSE OF THE MATHEMATICS

A.A. Kayumova, math teacher,
MBEI «School №161», Kazan
kayumova.alisa2011@yandex.ru

N.V. Timerbaeva, PhD in education, associate professor,
Kazan Federal University, Kazan
timnell@yandex.ru

Abstract. The article discusses the features of the teaching of the inverse trigonometric functions in the school mathematics course and provides guidelines for the lessons.

Keywords: inverse trigonometric functions, numeric circle, reverse function.

Школьники испытывают немалые трудности, изучая тригонометрию. Причинами этому является большое количество формул, которые необходимо помнить, и отсутствие готовых алгоритмов преобразования тригонометрических выражений.

Тригонометрический материал весьма интересен и специфичен, так как находится на стыке геометрии и алгебры. С тригонометрическими понятиями учащиеся средней школы впервые знакомятся в курсе планиметрии. Поэтому пропедевтическая роль тригонометрического материала, изложенного в курсе геометрии, велика: от освоения его в курсе геометрии будет зависеть, насколько успешным будет изучение тригонометрии в курсе алгебры. Учителю надо прийти к пониманию того, что тригонометрия в алгебре и геометрии не является никак не связанными отдельными дисциплинами, это – единый блок, изучение которого невозможно без получения первоначальных сведений о тригонометрии в курсе геометрии.

До 2000 г. постепенно претворялись в жизнь предложения по изменению порядка изучения тригонометрии. К сегодняшнему дню эти изменения являются общепринятыми. Как и в 1985-1986 уч. гг., так и сейчас раздел алгебры и начала анализа, посвященный тригонометрическим функциям и преобразованиям тригонометрических выражений, изучается в старших классах одиннадцатилетней школы. Поэтому на сегодняшний день те учащиеся, которые не переходят учиться в старшую школу, знакомятся с этой темой только в курсе геометрии.

Изучение тригонометрии должно осуществляться таким образом, чтобы у учащихся создалось целостное представление об этой теме. Не следует включать отдельные вопросы тригонометрии в другие разделы. Не следует также разделять материал на блоки, которые рассматриваются в отрыве друг от друга в разных классах, изучение материала надо осуществлять целостно, показывая все возможности применения тригонометрических преобразований на примере задач с разумным практическим содержанием. Полноценное обучение тригонометрии требует достаточно большого объема времени. Если физико-математические школы имеют необходимые ресурсы времени, то в общеобразовательной школе их совершенно недостаточно.

Чтобы показать значение данного раздела в школьной программе, приведем примерное поурочное планирование (3 ч в неделю, всего 102 ч) 10 класса по учебнику Алгебра и начала анализа: Учеб. для 10-11 кл. сред. шк. / Под ред. А. Н. Колмогорова. М.: Просвещение, 2008.

Таблица 1

Примерное поурочное планирование

№ п/п	Наименование раздела	Содержание	Урок №	Количество часов + контрольные работы
1	Тригонометрические функции любого угла	Угол поворота. Тригонометрические функции: синус, косинус, тангенс, котангенс любого угла. Знаки значений тригонометрических функций.	1-3	10 (часов) +1кр
		Соотношение между тригонометрическими функциями одного и того же угла. Применение основных тригонометрических формул к преобразованию выражений.	4-8	
		Радианная мера угла. Вычисление значений тригонометрических функций с помощью микрокалькулятора.	9-10	
2	Тригонометрические функции числового аргумента	Тригонометрические функции числового аргумента и их графики.	12-16	5 часов
3	Основные свойства функций	Функции и их графики.	17-20	26 часов +1кр
		Четные и нечетные функции. Периодичность тригонометрических функций.	21-22	
		Возрастание и убывание функций. Экстремумы.	23-24	
		Исследование функций. Свойства тригонометрических функций.	25-26	
4	Формулы сложения и их следствия	Формулы сложения.	28-30	8 часов
		Следствия из формул сложения. Формулы приведения, формулы двойного аргумента, формулы суммы и разности тригонометрических функций.	31-35	
5	Решение тригонометрических уравнений и неравенств	Арксинус, арккосинус и арктангенс.	36-37	15 часов +1кр
		Решение простейших тригонометрических уравнений.	38-40	
		Решение простейших тригонометрических неравенств.	41-43	
		Примеры решения тригонометрических уравнений и систем неравенств.	44-49	
…	…	…	…	…
6	Итоговое повторение	Тригонометрические преобразования	93-94	8часов +2кр
		Функции и графики.	95-96	

		Производная функции. Применение непрерывности и производной функции.	97-99 100	
		Тригонометрические уравнения и неравенства, системы тригонометрических уравнений.		

Изучение тригонометрических функций имеет особое значение в курсе тригонометрии. Наиболее сложным и для преподавателя с методической точки зрения, и для ученика с позиций понимания и усвоения является тема «Обратные тригонометрические функции». В учебниках школьной программы, к сожалению, должного внимания этой теме не уделяется. Например, в учебнике Колмогорова даются только определения арксинуса, арккосинуса, арктангенса, арккотангенса и простейшие упражнения на применение этих определений. Термин «Обратные тригонометрические функции» не вводится.

Очевидно, что понятия аркфункций, их свойства играют немаловажную роль в понимании сути решения тригонометрических уравнений и неравенств. Перед учителями возникает проблема: Что делать в такой ситуации?

Для хорошего овладения материалом и успешной сдачи школьниками ЕГЭ учителя проводят дополнительные часы, связанные с понятиями «обратимость» и «обратные тригонометрические функций».

Остановимся на двух главных моментах изучения этого дополнительного материала:

1) основное внимание в начале изучения тригонометрии надо уделить модели числовой окружности на координатной плоскости;
2) обратные тригонометрические функции.

Раскроем их суть более подробно.

1. Числовая окружность.

В школьном курсе математики в разные годы использовались различные варианты введения тригонометрических функций. В современных учебных пособиях предпочтение отдается определению с помощью единичной числовой окружности.

Личный опыт преподавания тригонометрии в школе показывает, что знакомить учащихся с единичной окружностью следует, как можно раньше, начиная хотя бы с IX класса. Единичная окружность – это вторая, после координатной прямой, модель действительных чисел. На единичной окружности легко демонстрируется то, что не очень наглядно представляется на координатной прямой, например, множества чисел, схожих друг с другом по каким-то особым свойствам. Эта идея в дальнейшем используется при решении тригонометрических уравнений и неравенств. Для грамотной записи ответа, требующей, в частности, исключения повторяющихся чисел, целесообразней использовать единичную окружность.

Рассмотрим в прямоугольной декартовой системе координат окружность с центром в начале координат – точке *O*. Отметим на окружности точку *P*, лежащую на оси абсцисс справа от точки *O*. Осуществим поворот радиуса *OP* около точки О на угол а в верхнюю полуплоскость. При этом радиус *OP* займет положение *OA*. Говорят, что при повороте на угол альфа радиус *OP* переходит в радиус *OA*, а точка *P* переходит в точку *A(x;y).* Достраивая прямоугольный треугольник *OAB*, приходим к определениям синуса, косинуса, тангенса и котангенса на единичной окружности (рис. 1).

После введения таких определений становится понятным установление взаимно-однозначного соответствия между множеством углов поворота (углов вращения) и множеством действительных чисел. Введения угла поворота позволяет придать смысл всем тригонометрический функциям неограниченного угла (в том числе и отрицательного), которое имеет широкое практическое значение.

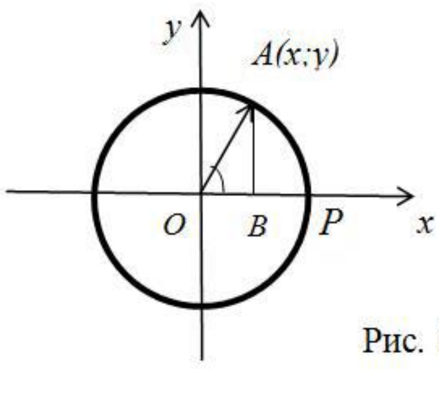

Рис. 1

Для графического изображения тригонометрических функций осью *Ox* выступает бесконечная длина единичной числовой окружности с радианными мерами, это меры углов (аргументов) функций, а осью *Oy* выступает обычная числовая прямая со значениями функций от определенных аргументов. Центр числовой окружности совпадает с точкой начала координат координатной плоскости.

2. Обратные тригонометрические функции.

При введении этой темы, если ранее обратные функции не изучались, нужно напомнить учащимся, где они могли встретиться с понятием «обратная функция». Можно предложить задачу: зная площадь квадратной комнаты, определить длины ее сторон. Для функции возведения числа в квадрат обратной функцией является извлечение арифметического квадратного корня.

После этого, по аналогии можно сказать о существовании функций, обратных к тригонометрическим, которые называются «обратными тригонометрическими функциями». С помощью этих функций решают задачу вычисления углов по известному значению тригонометрической функции. Например, с использованием таблицы значений основных тригонометрических функций можно вычислить синус, какого угла равен $\frac{1}{2}$. Если мы вспомним о периоде синуса, то поймем, что углов, при которых синус равен $\frac{1}{2}$, бесконечное множество. И такое множество значений углов, соответствующих данному значению тригонометрической функции, будет встречаться и для косинусов, тангенсов и котангенсов, т.к. все они обладают периодичностью. Для того, чтобы избежать возможного многообразия ответов, и вводятся обратные тригонометрические функции, иначе называемые «аркфункциями» (от латинского слова arcus – «дуга»). К обратным тригонометрическим функциям относятся арксинус, арккосинус, арктангенс, арккотангенс, арксеканс, арккосеканс.

Проанализировав школьные учебники Колмогорова А.Н., Мордковича А.Г., Алимова А.Ш. Виленкина Н.Я. (Углубленный уровень) [1, 2, 3, 4] мы пришли к выводу что, в основном, авторы учебников придерживаются следующих двух позиций:

1) *введение понятий аркфункций и рассмотрение отдельных свойств в качестве тождеств*;

2) *введение понятий и изучение аркфункций со всеми свойствами.*

В результате проведенного анализа, с целью совершенствования изучения темы, выделим следующие методические рекомендации:

- необходимо придерживаться геометрического истолкования рассматриваемых понятий на числовой окружности. Например, полезно изобразить арксинус на тригонометрической окружности: «как видим, «арк-синусы живут справа» (то есть на правой полуокружности), но не просто справа, а именно на отрезке $[-\pi/2\,;\ \pi/2]$» (рис. 2.).

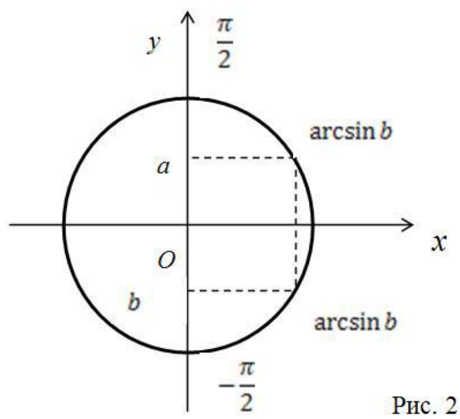

Рис. 2

При любом построении тригонометрической линии учитель математики при наличии времени и, конечно, желания может начать работу по обучению детей тригонометрии, в частности теме «Обратные тригонометрические функции», еще в VIII классе, так как значительное число упражнений выполняются «геометрически». Конечно, задания необходимо переформулировать так, чтобы они были знакомы ученикам и чтобы их решения были понятны;

- (рекомендация пропедевтического характера) при наличии времени учитель может предложить ученикам задания следующего типа:

Задача. Вычислить $cos\left(arctg\,\frac{3}{4}+arccos\,\frac{3}{5}\right)$.

Конечно, в такой формулировке задача учащимся основной школы непосильна, совсем непростая она и для десятиклассников. Если задачу переформулировать и расчленить на составляющие, то в VIII классе она легко решается. При формулировке надо помнить, что обратные тригонометрические функции решают задачу вычисления углов по известному значению тригонометрических функции.

Рассмотрим задачу «Вычислить косинус суммы острых углов α и β, если $tg\alpha = \frac{3}{4}$ и $\cos\beta = \frac{3}{5}$».

Восьмиклассники не знают тригонометрических формул и, естественно, им не придется преодолевать трудности их применения. Построим углы α и β на бумаге в клетку (рис. 3).

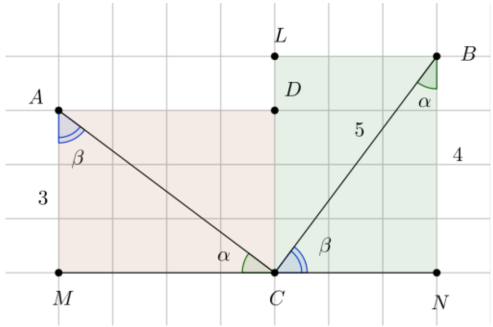

Рис.3

Прямоугольные треугольники AMC и CBN равны. А сумма двух острых углов в прямоугольном треугольнике равна 90°. Восьмиклассники знают, что $\cos 90° = 0$, поэтому$cos(\alpha + \beta) = 0$;

- при изучении любой темы школьной программы, требуется актуализировать базовые знания. Для изучения темы «Обратные тригонометрические функции» нужно вспомнить о существовании обратных функций. Поэтому, прежде чем изучать обратные тригонометрические функции, необходимо хорошо изучить тему: «Обратная функция и ее свойства»;
- объяснение темы следует сочетать с наблюдением за учащимися, проводить в форме беседы с наводящими вопросами.

Перед тем как рассмотреть и исследовать графики обратных тригонометрических функций, учителю следует обсудить с учащимися такие вопросы:

- Всякая ли функция имеет обратную?

- Каким условиям должна удовлетворять обратимая функция?

- Имеет ли тригонометрические функции, рассматриваемые в их естественной области определения, обратные?

Для этого требуется повторить тригонометрические функции и их свойства, графики.

Приведем примерный список вопросов, которых можно задать при рассмотрении функции «арксинус»:

1. Что называется областью определения функции?

- Областью определения функции является множество значений, которое может принимать аргумент x.

2. Какие значения может принимать число x в $arcsin\, x$? Почему?

- Согласно определению, $|x| \leq 1$.

3. Что является областью определения функции $y = arcsin\, x$?

- Отрезок $[-1; 1]$.

4. Что называется множеством значений функции?

- Множество значений функции – это все значения, которые принимает функция на своей области определения.

5. Какие значения может принимать $arcsin\, x$? Почему?

- Согласно определению, $-\frac{\pi}{2} \leq arcsin\, x \leq \frac{\pi}{2}$.

6. Какое множество значений имеет функция $y = arcsin\, x$?

- $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$;

- использовать возможности компьютерных технологий на уроках при изучении темы «Обратные тригонометрические функции». Интерактивная модель построения обратных тригонометрических функций в программе GeoGebra, позволяет улучшить точность графического материала на уроке (отсутствуют погрешности доски), значительно сэкономить время на изучение новой темы, увеличить продолжительность отработки и закрепления полученных знаний.

Эффективное усвоение свойств обратных тригонометрических функций, а, следовательно, в дальнейшем эффективная работа с тригонометрическими уравнениями и неравенствами, возможны лишь при условии, что ученик решит определенное число должным образом подобранных примеров с обратными тригонометрическими функциями.

Литература

1. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы. (базовый и углубленный уровни). / Алимов А.Ш., Колягин Ю.М. и др. – М.: Просвещение, 2012. – 320 с.
2. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс. Углубленный уровень. / Виленкин Н.Я., Ивашев-Мусатов О.С., Шварцбурд С.И. – М.: Мнемозина, 2014. – 313 с.
3. Алгебра и начала математического анализа: учеб. Для 10-11 кл. общеобразоват. учреждений / Колмогоров А.Н., Абрамов А.М., Дудницин Ю.П. и др.; под ред. А.Н.Колмогорова. -17-е изд. – М.: Просвещение, 2008. – 384 с.
4. Алгебра и начала математического анализа: учеб. для 10-11 кл. Учебник и задачник. Базовый уровень. В 2 ч. / Мордкович А.Г., Денищева Л.О, Корешкова Т.А. и др.; под ред. А.Г.Мордковича. – М.: Мнемозина, 2014. – 380 с.
5. Генкин Г. З. Тригонометрические упражнения в основной школе [Текст]/ Г. З. Генкин – Математика в школе. – 2004. – №7. – С. 33-38.
6. Захарова А. Е. Постигаем азы тригонометрии: арксинус, арккосинус, арктангенс [Текст] / А. Е. Захарова // Математика в школе. –2007. – №1. – С. 21-31.
7. Новиков А. И. Обратные отображения – основа изучения обратных тригонометрических функций [Текст]/ А. И. Новиков // Математика в школе. – 2006. – №8 – С. 27-35.
8. Новиков А. И. Вычислительные задачи с обратными тригонометрическими функциями [Текст]/ А. И. Новиков // Математика в школе. – 2007. – №1. – С.31-34.